NOM: HOURS Prénom: Florent

Rouge — Entourer l'épreuve — Bleu Entourer le Jury — A B C D E F

Sujet choisi: 203 - Utilisation de la notion de compacité.

Autre sujet: 249 - Suites de variables de Bernoulli indépendantes.

I - NOTION DE COMPACITÉ

1) Espace topologique $(E, \mathcal{T})$

Déf 1: $A \in \mathcal{P}(E)$. On appelle recouvrement (ouvert) de A une famille $(O_i)_{i\in I}$ de parties (ouvertes) de E tq $A \subset \bigcup_{i\in I} O_i$.

Déf 2: • $(E, \mathcal{T})$ est dit compact s'il est séparé et si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous recouvrement fini.
• Une partie A d'un espace séparé est compacte si A muni de la topologie induite est compact.

Ex 3: • un espace discret est compact
• $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

Prop 4: $(E, \mathcal{T})$ est compact ssi pour toute famille de fermés de E d'intersection vide, on peut extraire une sous famille d'intersection vide.

Rq 5: La notion de compacité est topologique, stable par homéomorphisme.

Prop 6: $A \in \mathcal{P}(E)$
• A compacte $\Rightarrow$ A fermée
• E compact, A fermée $\Rightarrow$ A compact

Prop 7: $(E, \mathcal{T})$ séparé. Une réunion finie de compacts de E est compacte, une intersection non vide quelconque aussi.

Th 8: (Tychonov) Le produit fini d'espaces compacts est compact.

Déf 9: $(E, \mathcal{T})$ est localement compact s'il est séparé et si tout point possède un système fondamental de voisinages compacts.

Prop 10: $(E, \mathcal{T})$ est loc. compact ssi tout point possède un voisinage compacte.

Ex 11: $\mathbb{R}$ est localement compact.

2) Espace métrique (E, d)

Prop 12: $A \in \mathcal{P}(E)$. A compacte $\Rightarrow$ A borné

Th 13: (E, d) est compact ssi toute suite de E admet au moins une valeur d'adhérence.

Déf 14: (E, d) est dit précompact si $\forall \varepsilon > 0$, E peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε.

Ex 15: $\mathbb{R}^n$ est précompact

Th 16: E compact ssi $\begin{cases} E \text{ complet} \\ E \text{ précompact} \end{cases}$

3) Espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$

Prop 17: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(u_n)_n$ suite bornée de $\mathbb{K}$. Alors (u_n) a une valeur d'adhérence.

Csq 18: Les parties compacts d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie sont les parties fermées bornées.

II - COMPACITÉ ET CONTINUITÉ

1) Fonction continue sur un compact

Th 19: $(E, \mathcal{T})$ compact, $(F, \mathcal{T}')$ séparé. Soit $f: E \to F$ continue. Alors $f(E)$ est compact.

NOM: HOURS

Prénom: Florent

(Rouge) — Entourer l'épreuve — Bleu

Entourer le Jury — (A) B C D E F

Sujet choisi: 203 -

Autre sujet: 249 -

Cor 20: si $f: E \to F$ est continue et injective alors f est un homéomorphisme de E sur $f(E)$.

Cor 21: toute fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

Appl 22: E un $\mathbb{K}$-ev de DF. Alors toutes les normes sont équivalentes.

Appl 23 (Riesz). E un $\mathbb{K}$-evn. E est de DF ssi $B(0,1)$ est compacte.

Appl 24: (Rolle) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, et dérivable sur $]a,b[$, avec $f(a)=f(b)$. Alors $\exists c \in]a,b[$ tq $f'(c)=0$

Appl 25: toute fonction continue et coercive de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ possède un minimum global.

Appl 26: $x \in E$, K compact de E. Alors $d(x,K)$ est atteinte.

Th 27: (Heine) (E,d) compact, $f: E \to F$ continue. Alors f est uniformément continue.

Cor 28: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, 2π-périodique. Alors f est UC.

Appl 29: (Fejér) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, 2π périodique. Alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f en moyenne de Cesaro.

2) Théorème d'Ascoli.

Déf 30. (E, τ). $A \in \mathcal{P}(E)$ est relativement compacte si $\bar{A}$ est compacte.

Déf 31: E, F espaces métriques. $A \subset \mathcal{C}(E,F)$ est dite équicontinue en $x \in E$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ $\forall y \in E$ tq $d(x,y) < \alpha$, $d(f(y), f(x)) < \varepsilon$ $\forall f$.

Th 32: $A \subset \mathcal{C}(E,F)$. E compact, F complet. A est relativement compacte dans $(\mathcal{C}(E,F), \|.\|_\infty)$ ssi

- A équicontinue
- $\forall x \in E$, $\{f(x), f \in A\}$ rel. comp. dans F.

III - CONVERGENCE & APPROXIMATION

1) Suites

Prop 33: une suite à valeurs dans un compact ayant une unique valeur d'adhérence converge vers cette valeur.

Appl 34. $S_n \underset{\text{homéo}}{\simeq} S_n^{++}$.

2) Suites de fonctions.

Th 35: (Dini)

- (f_n) une suite décroissante de fonctions continues définies sur un espace métrique K compact, à valeurs réelles. Si $f_n \xrightarrow{S} f$ avec f continue, Alors $f_n \xrightarrow{U} f$.
- (f_n) suite de fonctions décroissantes $K \to \mathbb{R}$, tq $f_n \xrightarrow{S} f$, f continue Alors $f_n \xrightarrow{U} f$.

Appl 36: (Glivenko Cantelli) $(X_n)_n$ une suite de v.a i.i.d. On note F la fonction de répartition commune des X_n. On pose $F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} \mathbb{1}_{]-\infty, t]}(X_k)$. Alors $F_n \xrightarrow{U} F$ ps.

NOM: HOURS

Prénom: Florent.

(Rouge) — Epreuve l'épreuve — Bleu

Ecoute le Jury — (A) B C D E F

Sujet choisi: 203

Autre sujet: 249

3) Densité dans les fonctions continues

Th 37. $t\in[0,1]$. $X_i \sim Ber(t)$. $S_n = X_1+\dots+X_n$. $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue

$E(f(\frac{S_n}{n})) \xrightarrow{U} f$

Cor 38 (Weierstrass) Toute fonction réelle continue sur un compact est limite uniforme de polynômes.

Th 38. Toute fonction réelle continue et 2π-périodique est limite uniforme de polynôme trigonométriques.

Th 39. (Stone Weierstrass) $(E,\mathcal{T})$ esp topologique compact. $\mathcal{A}$ sous algèbre de $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ tq

- $\forall x,y \in E$, $\exists \alpha \in \mathcal{A}$ tq $\alpha(x)\neq\alpha(y)$.
- Les fonctions constantes sont dans $\mathcal{A}$

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $(\mathcal{C}(E,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

IV - COMPACITÉ ET GROUPES TOPOLOGIQUES

1) Théorèmes d'homéomorphisme.

Th 40: si $G \curvearrowright X$, G compact, action continue et transitive, alors $G/G_x \underset{\text{homéo}}{\simeq} X$

Th 41. si G est localement compact, réunion dénombrable de compacts, opérant continûment et transitivement sur X localement compact, alors $G/G_x \underset{\text{homéo}}{\simeq} X$

Appl 42. $GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe

2) Sous groupes compacts de $GL_n(\mathbb{C})$

Lemme 43. K un compact. Alors l'enveloppe convexe de K est compacte.

Th 44. Soit G un sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une forme quadratique définie positive q telle que $G \subset O(q)$

DÉVELOPPEMENTS.

1. Stone Weierstrass réel (Th 49)
2. Sous groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$ (Th 44).